

## 병렬OMP 기법을 통한 성긴신호 복원과 그 성능

박정홍<sup>1</sup> · 정방철<sup>1</sup> · 김종민<sup>2</sup> · 반태원<sup>1\*</sup>

### Sparse Signal Recovery with Parallel Orthogonal Matching Pursuit and Its Performances

Jeonghong Park<sup>1</sup> · Bang Chul Jung<sup>1</sup> · Jong Min Kim<sup>2</sup> · Tae Won Ban<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup> Department of Information and Communication Engineering, Gyeongsang National University, Tongyeong, 650-160, Korea

<sup>2</sup> Department of Mathematics and Computer Science, Korea Science Academy of KAIST, Busan 614-822, Korea

#### 요 약

본 논문에서는 성긴 신호의 복원을 위하여 기존의 직교매칭퍼썬(orthogonal matching pursuit, OMP) 기술을 보완한 Parallel OMP (POMP) 기법을 제안하고 성능을 분석한다. POMP 알고리즘의 과정은 간단하지만 기존 OMP와 비교하여 더 좋은 성능을 보이는 알고리즘이다. POMP는 첫 번째 반복 과정에서 관찰 행렬과 상관도가 높은 인덱스 집합을 여러 개 선택한다. 선택된 각각의 인덱스를 첫 번째 인덱스로 하는 각각의 POMP 블록에서 OMP 알고리즘 기법이 병렬적으로 동작한다. 마지막으로 신호 복원을 위해 가장 작은 잔류 오차(residual)를 갖는 POMP 블록의 인덱스 집합을 선택한다. 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 제안된 POMP가 기존의 신호 복원 기술에 비하여 완벽복원비율과 평균 제곱 오차(MSE) 측면에서 좋은 성능을 보임을 확인하였고, 이 미지복원에 있어서는 눈으로 확인 가능할 정도의 성능 개선을 확인하였다.

#### ABSTRACT

In this paper, parallel orthogonal matching pursuit (POMP) is proposed to supplement the orthogonal matching pursuit (OMP) which has been widely used as a greedy algorithm for sparse signal recovery. The process of POMP is simple but effective: (1) multiple indexes maximally correlated with the observation vector are chosen at the first iteration, (2) the conventional OMP process is carried out in parallel for each selected index, (3) the index set which yields the minimum residual is selected for reconstructing the original sparse signal. Empirical simulations show that POMP outperforms than the existing sparse signal recovery algorithms in terms of exact recovery ratio (ERR) for sparse pattern and mean-squared error (MSE) between the estimated signal and the original signal.

**키워드** : 압축 센싱, 성긴 신호 복원, 직교매칭퍼썬, 검파, 평균제곱오차

**Key word** : Compressed sensing, Sparse signal recovery, Orthogonal matching pursuit, Detection, Mean squared error

접수일자 : 2013. 06. 26 심사완료일자 : 2013. 07. 19 게재확정일자 : 2013. 08. 01

\* Corresponding Author Tae-Won Ban (E-mail: twban35@gnu.ac.kr, Tel:+82-55-772-9177)

Department of Information and Communication Engineering, Gyeongsang National University, Tongyeong, 650-160, Korea

Open Access <http://dx.doi.org/10.6109/jkiice.2013.17.8.1784>

print ISSN: 2234-4772 online ISSN: 2288-4165

©This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.  
Copyright © The Korea Institute of Information and Communication Engineering.

## I. 서론

압축센싱(compressed sensing) 기술은 성긴 신호를 under-determined 된 선형 관찰신호로부터 복구할 수 있는 기술로서 성긴 신호처리(sparse signal processing) 분야에서 매우 혁명적인 기술로 알려져 있다 [1][2]. 압축센싱기술은 모든 데이터를 나이퀴스트율로 먼저 샘플링한 후 생성된 신호를 압축하거나 처리하는 기존의 신호처리 기법과는 매우 다른 특성을 가지고 있다 [3].

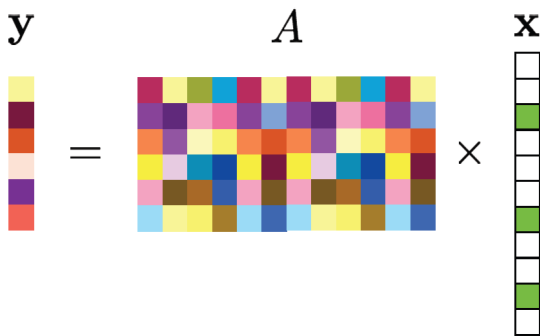


그림 1. 압축센싱기법을 도식화한 수학 모델  
Fig. 1 Compressed sensing signal model

그림 1에서와 같이 성긴 신호 즉 신호를 이루는 원소가 0이 아닌 개수(녹색) 보다 0인 개수(흰색)가 많은 신호  $x$ 를 특정 조건을 만족하는 측정 행렬  $A$ 를 이용하여 만들어진 신호  $y$ 는 완벽하게 복원할 수 있다는 것은 잘 알려진 사실이다 [4]. 압축 센싱 기술은 기본적으로 선형측정방법과 신호 복원방식으로 나눌 수 있다. 선형측정방법은 수학적으로 표현했을 때, 길이  $n$ 을 갖는 성긴 신호  $x \in R^n$  벡터에  $m \times n$  행렬  $A \in R^{m \times n}$ 를 곱하는 과정으로 해석할 수 있다. 구체적인 수식은 아래와 같다.

$$y = Ax + z \tag{1}$$

이 과정을 통해 길이  $m$  인 관찰 벡터  $y \in R^m$ 를 얻을 수 있는데, 신호 복원방식은 이 벡터  $y$ 로부터 원신호인  $x$  벡터를 찾는 과정으로 해석할 수 있다. (1)에서  $z$ 는 가우시안 잡음을 나타낸다.

신호 복원은 아래의 수식 (2)를 푸는 문제로 볼 수 있

고, 이것은 convex 최적화 알고리즘인 선형 프로그래밍 (Linear Programming, LP)으로서 신호 복원 성능은 우수하나 복잡도가 상당히 높다는 단점이 있다.

$$\min \|x\|_1 \quad \text{subject to } Ax = y \tag{2}$$

이 복잡도를 줄이기 위하여 여러 가지 알고리즘들이 제안되었으며, Orthogonal Matching Pursuit(OMP), Compressive Sampling Matching Pursuit (CoSaMP) 등이 있다 [4][5]. 이 알고리즘 중에서 복원성능이 비교적 뛰어나고 복잡도가 낮은 OMP 알고리즘이 가장 널리 쓰이는 알고리즘으로써, 최근 많은 연구자들이 OMP 알고리즘의 성능을 개선시키기 위해 활발히 연구를 진행하고 있다. 본 논문에서는 이러한 OMP 알고리즘을 개선한 POMP 알고리즘을 제안하고 그 성능을 분석한다.

## II. POMP 알고리즘

OMP 알고리즘은 아래 그림 2에서 보는 바와 같이 매 반복과정에서 측정벡터와 수신신호의 상관도가 가장 큰 한 개의 인덱스를 후보 집합에 추가한다. 이런 OMP의 첫 번째 반복과정에서 인덱스를 선택할 때 가장 높은 오류 확률이 존재할 수 있다는 것에 착안하여 POMP를 제안한다.

- Input <ul style="list-style-type: none"> <li><math>A \in R^{m \times n}</math></li> <li><math>y \in R^m</math></li> <li><math>x \in R^n</math></li> <li>sparsity level <math>k</math></li> </ul>	- Output <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\hat{x} \in R^n</math></li> <li><math>\Lambda_i \subset \{1, \dots, n\}</math></li> <li><math>a_i</math></li> <li><math>r_m = y - a_i</math></li> </ul>
- Procedure 1. Initialize the residual $r_0 = y$ , the index set $\Lambda_0 = \phi$ , and iteration $i = 1$ 2. $\lambda_i = \arg \max_{j=1, \dots, n}   \langle a_j, r_{i-1} \rangle  $ 3. $\Lambda_i = \Lambda_{i-1} \cup \{\lambda_i\}$ , $A_i = [A_{i-1} \quad a_{\lambda_i}]$ and $A_0$ is an empty matrix. 4. $\hat{x}_i = (A_i^T A_i)^{-1} A_i^T y$ 5. $r_i = y - A_i (A_i^T A_i)^{-1} A_i^T y$ 6. $i = i + 1$ and return to Step 2 until $i = k$	

그림 2. OMP 알고리즘의 수행 과정  
Fig. 2 Process of OMP Algorithm

POMP에서는 첫 번째 반복과정에서  $M$  개의 상관도가 큰 후보들을 채택 후 그 각각의 후보가 각 병렬 OMP

의 초기 후보가 된다. 2 번째 반복과정에서 각각의 후보 집합에 있는 초기 후보를 기반으로 기존의 OMP 방식과 동일하게 2 번째 후보를 각 후보 집합에 인덱스로 추가한다.

Iteration	OMP	POMP (M=3)
1	$\Lambda_1 = \{a_6\}$	$\Lambda_1^1 = \{a_6\}, \Lambda_1^2 = \{a_3\}, \Lambda_1^3 = \{a_8\}$
2	$\Lambda_2 = \{a_6, a_2\}$	$\Lambda_2^1 = \{a_6, a_2\}, \Lambda_2^2 = \{a_3, a_4\}, \Lambda_2^3 = \{a_6, a_7\}$
3	$\Lambda_3 = \{a_6, a_2, a_5\}$	$\Lambda_3^1 = \{a_6, a_2, a_5\}, \Lambda_3^2 = \{a_3, a_4, a_{10}\}, \Lambda_3^3 = \{a_6, a_7, a_1\}$
⋮	⋮	⋮

그림 3. POMP 기법 기반의 인덱스 집합 형성 과정의 예  
**Fig. 3** Example of index set generation of POMP in case when  $M=3$

그림 3 은 POMP기반의 인덱스 집합 형성 과정의 예를 보여준다. 그림에서  $a_i$  는 센싱 행렬의  $i$  번째 열을 나타내고  $\Lambda_t^j$  는  $t$  번째 반복과정에서의  $j$  번째 인덱스 후보 집합을 나타낸다. 기존의 OMP의 경우 1 번째 과정에서  $a_6$ 가 선택되고 2 번째 과정에서  $a_2$ 가 추가된다. 3 번째 반복과정에서  $a_5$ 가 추가된다. OMP의 경우 sparsity ( $x$  벡터에서 0이 아닌 원소의 개수)가  $k$  일 때, 이러한 반복과정을  $k$  번 반복한다. 그림 3에서 제안된 POMP 기법은 1 번째 반복과정에서  $a_6, a_3, a_8$ 이 함께 선택된다. 2 번째 반복과정에서는 첫 번째 후보 집합은  $a_2$ 가 추가되고, 두 번째와 세 번째 후보 집합에는 각각  $a_4, a_7$ 이 추가된다. 물론 동일한 인덱스가 추가되는 경우도 있고, 반복과정이 진행되는 과정에서 후보 집합이 정확히 일치하는 경우도 발생하는데, 이렇게 정확히 후보 집합이 일치하는 경우 2개의 후보 집합을 합치고 새로운 후보 집합을 만들어 전체적으로 항상  $M$  개의 OMP알고리즘이 병렬로 동작하도록 하는 방법과 새로운 후보 집합을 만들지 않고  $k$  번을 반복하도록 하는 방법을 설정할 수 있다. 이 두 가지 방법은 성능향상과 복잡도 사이의 trade-off가 존재한다. 마지막  $k$  번째 반복과정에서는 각 OMP 블록에서 만든  $M$ 개의 인덱스 집합 중 residual [4]이 가장 작은 후보 집합을 선택하고,  $x$ 를 추정한다.

### III. 모의실험 결과 및 분석

#### 3.1. 모의 실험 절차

본 논문에서는 제안한 POMP의 성능 분석을 위하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다. 성능의 비교를 위해 기존 기술로서 LP, OMP 기술과 OMP 기술을 개선한 CoSaMP 기술을 고려하였다 [5]. 입력신호의 sparsity는  $k$ 로 나타낸다. 입력 신호  $x$ 는 평균이 0이고 분산이 1인 가우스 분포를 갖는 신호를 사용하였고, 측정 행렬은 각 원소가 평균이 0이고 분산이  $\frac{1}{m}$ 인 가우스 분포로부터 만들었다. 여기서  $m$ 은 측정 행렬의 행의 개수이다. 그림 4와 5에서는 입력신호의 길이는 256이고, 측정행렬은  $128 \times 256$  행렬이다. 평균적인 성능을 구하기 위하여 5000 번의 시뮬레이션을 반복한 후 결과를 그렸다. 그림 6은 사이즈  $64 \times 64$  Shepp-Logan phantom 이미지를 OMP알고리즘과 POMP  $M=4, M=8$ 을 이용하여 복원성능을 분석한 결과이다.

그림 4는 잡음이 존재하지 않는 경우에 성긴 신호의 sparsity 패턴의 완벽 복원율 (exact recovery ratio, ERR)을 나타내고 있다. 이는 (1)에서 더해진  $z$ 가 0인 경우이다. ERR은 입력신호 벡터에서 0이 아닌 원소의 위치를 정확히 찾아내는 확률을 나타내고 이때 입력신호 자체를 추정하는 것이 아니고 0이 아닌 원소의 위치만 정확히 찾는 추정 확률을 나타낸다. 그림 4에서  $x$  축은 sparsity를 나타내며 전체 256 개의 원소 중 0이 아닌 원소의 개수이다.

그림 5는 잡음이 존재하는 경우( $z$ 가 0이 아닌 경우) sparsity를 45로 가정하고 원 신호 벡터인  $x$ 와 제안된 POMP를 통하여 추정한  $x$ 의 추정치와의 평균 제곱 오차 (mean-squared error, MSE)를 SNR에 따라 나타내고 있다. 여기서 SNR 식은 다음과 같이 주어진다. 본 실험에서는 측정벡터의 길이 대비 1/2 이내의 sparsity 값 ( $k=47$ )을 사용하였는데, 그 이유는 기존의 OMP 알고리즘이 동작 가능한 sparsity범위이기 때문이다.

$$SNR = \frac{E[\|Ax\|^2]}{E[\|z\|^2]} \tag{3}$$

그리고 POMP를 통하여 복원한 성긴 신호 벡터  $x$ 의

추정벡터를  $\hat{x}$ 라 가정하면 MSE는 다음 식으로 주어진다.

$$MSE = E[\|x - \hat{x}\|^2] \quad (4)$$

그림 6은 왼쪽에서부터 OMP, POMP  $M=4$ ,  $M=8$ 을 각각 이용하여 사이즈  $64 \times 64$  Shepp-Logan phantom 이미지를 복원한 결과이다.

### 3.2. 결과분석

그림 4에서 보는 바와 같이 sparsity에 따른 ERR에 대한 성능은 제안한 POMP가 기존의 OMP 보다 항상 좋은 성능을 가지며,  $M$ 이 커질수록 성능이 좋아진다. CoSaMP와 비교해보면 sparsity가 45 보다 작을 때는 성능이 떨어지지만 45 보다 큰 sparsity 에 대해서는 더 좋은 성능을 가진다. LP와 비교해보면 sparsity가 40 보다 작을 때는 성능이 비슷하지만 sparsity가 40 보다 큰 구간에서는 더 좋은 성능을 가진다. 100% 복원을 위한 sparsity의 최대 값에 대하여, OMP는 20, CoSaMP는 45 LP는 32의 값을 가진다. 제안한 POMP의 경우  $M$ 이 64인 경우 약 32개,  $M$ 이 16인 경우 30,  $M$ 이 8인 경우 27의 값을 갖는다.

그림 5에서는 Sparsity가 45일 경우 SNR 값에 따른 MSE결과로 기존의 OMP에 비해 POMP기법이 SNR의 증가에 따라 약 0dB~20dB의 성능차이가 나며, CoSaMP에 비해 SNR에 상관없이 약 7dB~13dB의 성능차이가 난다. 그리고 LP에 비해 POMP기법의 성능이 SNR의 증가에 따라 약 0dB~10dB 좋은 것을 확인하였다. POMP의  $M$ 의 증가에 따른 성능 변화는 약 0dB~10dB 정도의 성능 변화를 확인 하였다.

그림 6에서는 왼쪽에서부터 OMP, POMP  $M=4$ ,  $M=8$ 을 각각 이용하여 사이즈  $64 \times 64$  Shepp-Logan phantom 이미지 복원 성능 분석을 위한 결과로서 왼쪽 OMP알고리즘을 이용하여 복원한 이미지는 노이즈가 많이 포함되어있어 이미지를 알아보기 힘든 상태이고, POMP  $M=4$ 를 이용하여 복원한 이미지는 OMP보다는 노이즈가 적고 이미지의 윤곽정도만 확인 가능한 상태이며, POMP  $M=8$ 을 이용하여 복원한 이미지는 노이즈가 거의 없이 복원되어 이미지를 정확하게 확인할 수 있다. 결과적으로 제안한 POMP알고리즘은 신호 복

원 성능과 마찬가지로 이미지 복원 성능 또한 기존 OMP의 이미지 복원 성능보다 좋은 것을 확인할 수 있으며,  $M$ 이 증가함에 따라 신호 복원 성능뿐만 아니라 이미지 복원 성능도 증가하는 것을 확인할 수 있다.

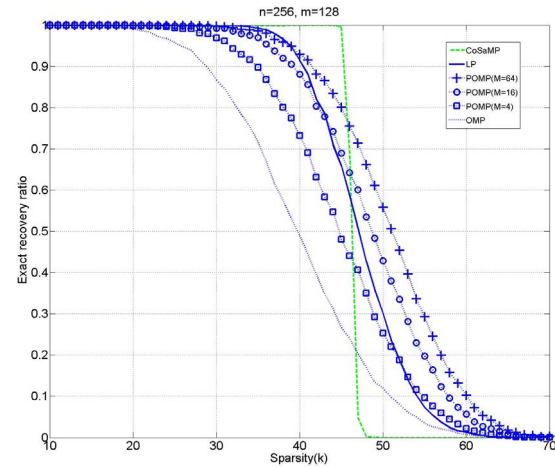


그림 4. 잡음이 존재하지 않는 환경에서 제안한 POMP 기법의 ERR 성능  
Fig. 4 Exact recovery ratio(ERR) of POMP for varying sparsity without noise

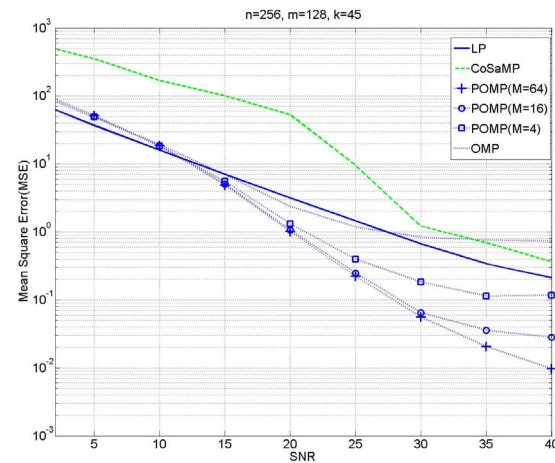


그림 5. 잡음이 존재하는 환경에서 제안한 POMP 기법의 SNR에 따른 MSE 성능  
Fig. 5 Mean squared error (MSE) of POMP with noise for varying SNR values

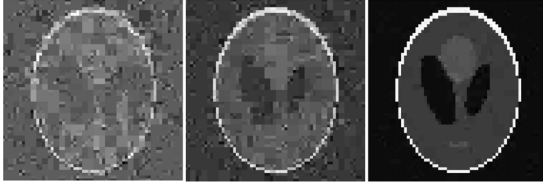


그림 6. 제안된 알고리즘으로 복원한  $64 \times 64$  Shepp-Logan phantom 이미지; 기존 OMP(왼쪽), POMP  $M=4$  (중간), POMP  $M=8$  (오른쪽)

Fig. 6 Reconstructed image of Shepp-Logan phantom with size of  $64 \times 64$  from conventional OMP (left), POMP with  $M=4$  (center), and POMP with  $M=8$  (right)

에서 후보 인덱스  $M$ 을 크게 설정하면 원 신호  $x$ 의 복원 성능이 증가한다. 반대로 인덱스  $M$ 을 작게 설정하면 성능은 약간 저하 되지만 복잡도는 줄어든다.

### 감사의 글

본 연구는 한국과학영재학교 기본연구비로 수행되었음.

## IV. 결 론

본 논문에서는 기존의 OMP 알고리즘을 개선한 병렬 OMP 알고리즘을 제안하였다. POMP 알고리즘은 OMP 알고리즘의 낮은 복잡도를 유지하면서 복원 성능을 개선하기 위하여 첫 반복과정에서 인덱스 선택을  $M$ 만큼 선택한 후 각  $M$ 개의 병렬 후보 집합을 기반으로 OMP로 동작하는 방식이다. 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 제안된 완벽복원 가능한 sparsity 개수를 비교한 결과, POMP 알고리즘은 기존의 OMP 기법에 비해 약 7~12개의 차이로 성능이 개선되었고, LP 알고리즘과는 비슷한 성능을 나타내는 것을 확인하였다. 평균 제곱 오차 측면에서는 제안된 POMP 알고리즘은 OMP에 비해 SNR의 증가에 따라 약 0dB~20dB의 성능 개선 효과가 있고, LP에 비해 SNR의 증가에 따라 약 0~10dB의 성능 개선 효과가 있으며, CoSaMP에 비해 SNR에 상관없이 7dB~13dB의 성능 개선이 있음을 확인하였다. POMP 알고리즘은 복잡도와 성능사이에 trade-off가 존재한다. POMP의 복잡도는 기존의 OMP 복잡도에 비해  $M$ 배 만큼이 증가되지만, 성능향상을 위해 첫 번째 과정

## REFERENCES

- [1] E. Candes, J. Romberg, and T. Tao, "Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information," *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. 52, no. 2, pp. 489-509, Feb. 2006.
- [2] D. Donoho, "Compressed sensing," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289-1306, Apr. 2006.
- [3] B. C. Jung and W. -Y. Shin, "Applications of compressed sensing to next-generation communication networks," *KICS Journal*, Vol. 28, No. 9, pp. 69-75, Sept. 2011.
- [4] J. A. Tropp and A. C. Gilbert, "Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 53, no. 12, Dec. 2007.
- [5] D. Needell and J. A. Tropp, "CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 26, no. 3, pp. 301-321, Mar. 2009.

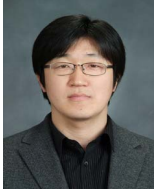


박정홍(Jeonghong Park)

2011년 2월 한국평생교육진흥원 정보통신공학 학사

2011년 3월 경상대학교 정보통신공학과 석박사통합과정

※관심분야: Compressed Sensing, 차세대 이동통신 시스템(4G, Beyond 4G, and 5G), 간섭 정렬, MIMO, 분산안테나 시스템



**정방철(Bang Chul Jung)**

2002년 2월 아주대학교 전자공학부 학사  
2004년 8월 KAIST 전자전산학과 석사  
2008년 2월 KAIST 전자전산학과 박사  
2008년 3월~2009년 8월 KAIST IT 융합연구소 팀장  
2009년 9월~2010년 2월 KAIST IT 융합연구소 연구교수  
2010년 3월~현재 경상대학교 정보통신공학과 조교수

※관심분야 : 이동통신, 신호처리, 협력 및 중계통신, Cognitive Radios, Compressed Sensing, 차세대 이동통신 시스템



**김종민(Jong Min Kim)**

1999년 2월 KAIST 수학과 학사  
2001년 2월 KAIST 응용수학전공 석사  
2007년 8월 KAIST 수리과학과 박사  
2007년 9월~2008년 8월 KAIST 자연과학연구소 연수연구원  
2008년 9월~2009년 8월 국가수리과학연구소 박사후연구원  
2009년 9월~2010년 2월 KAIST 정보전자연구소 연수연구원  
2010년 3월~2012년 12월 KAIST 바이오 및 뇌공학과 연구교수  
2013년 3월~현재 KAIST 부설 한국과학영재학교 수리정보과학부 선임교사

※관심분야 : 조화해석학, 신호처리, 샘플링 이론, Compressed Sensing



**반태원(Tae Won Ban)**

1998년 2월 경북대학교 전자공학과 학사  
2000년 2월 경북대학교 전자공학과 석사  
2010년 2월 KAIST 전기및전자공학 박사  
2009년 6월~2010년 10월 KT 연구 엔지니어  
2011년 2월~2012년 8월 KT Project Manager  
2012년 9월~현재 경상대학교 정보통신공학과 조교수

※관심분야 : 차세대 이동통신, 무선 자원 관리, Cognitive Radios, Relay Systems, OFDM/MIMO